(19)

SOPRA UN'APPLICAZIONE

DI UN

TEOREMA CONOSCIUTO DI GEOMETRIA

NOTA

DI

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
TIP. E LIT. CAMILLA E BERTOLERO
Via Ospedale, N. 18
1883.

SOPRA UN'APPLICAZIONE

DI UN

TEOREMA CONOSCIUTO DI GEOMETRIA

NOTA

DI

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
TIP. E LIT. CAMILLA E BERTOLERO
Via Ospedale, N. 18.
1883.

In una Memoria di Chasles, stampata sul finire dell'anno 1855, è dimostrato che le generatrici rettilinee, di uno stesso sistema, di una quadrica rigata secano due coniche qualunque tracciate su di essa quadrica in due serie di punti omografiche fra di loro (1).

Nella maggior parte dei Trattati, in cui si espone la teoria delle quadriche, non si trova la proposizione testè accennata, ma solo vi si considera il caso particolare di essa, che si ha quando ciascuna delle due coniche descritte sulla quadrica si riduce al sistema di due rette: quantunque con tale restrizione nè si faciliti, nè sensibilmente si abbrevii la dimostrazione del teorema.

(1) Il signor E. di Jonquieres, circa la stessa data, ha pubblicato, dimostrandola mediante considerazioni di Cinematica, la proposizione seguente, la quale è manifestamente un caso particolare di quella di Chasles sopra riferita: le generatrici rettilinee, di uno stesso sistema, di un iperboloide rigato sieno distribuite per coppie k_1, k_1'; k_2, k_2'; k_3, k_3';..... e dicansi rispettivamente M_1, M_1'; M_2, M_2'; M_3, M_3';..... le loro tracce sopra un piano dato μ, ed N_1, N_1'; N_2, N_2'; N_3, N_3';.... le loro tracce sopra un altro piano ν: se la distribuzione delle generatrici in coppie è stata fatta in modo che le rette $M_1 M_1'$, $M_2 M_2'$, $M_3 M_3'$,.... sieno raggi d'uno stesso fascio, anche le rette $N_1 N_1'$, $N_2 N_2'$, $N_3 N'_3$,.... sono raggi di uno stesso fascio, qualunque sia il piano ν.

Mi è parso tuttavia che la suaccennata proposizione più ampia dello Chasles fosse suscettibile di utili applicazioni, segnatamente a semplificare le costruzioni di Geometria descrittiva, che occorrono nella risoluzione di alcuni problemi sulle quadriche, e mi propongo di ciò far vedere prendendo ad esempio la questione: trovare i punti U e V, in cui una retta data h seca la quadrica definita da tre sue generatrici rettilinee date g_1, g_2, g_3 appartenenti ad uno stesso sistema.

Come è noto, il procedimento generalmente usato per risolvere tale problema consiste nel fissare dapprima sopra una, g_1 p. es., delle tre rette date g_1, g_2, g_3 tre punti arbitrari M_1, N_1, P_1: nel condurre poi i piani $M_1\,h$, $N_1\,h$, $P_1\,h$, e trovare i punti M_2, N_2, P_2 d'incontro di questi piani colla retta g_2, ed i punti M_3, N_3, P_3, intersezioni dei piani stessi colla retta g_3; nel tirare in seguito le rette $M_1 M_2$, $N_1 N_2$, $P_1 P_2$; $M_1 M_3$, $N_1 N_3$, $P_1 P_3$ e segnare i punti X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3, nei quali queste rette rispettivamente tagliano la retta h: i punti cercati U e V sono allora gli elementi uniti delle due punteggiate omografiche sovrapposte, delle quali X_2, X_3; Y_2, Y_3; Z_2, Z_3 sono tre coppie di elementi corrispondenti.

Ma il problema proposto può anche risolversi in quest' altro modo: si conducano per la retta h due piani arbitrari α e β: si trovino le intersezioni I_1, I_2, I_3 del piano α colle rette g_1, g_2, g_3, e le intersezioni L_1, L_2, L_3 di queste stesse tre rette g_1, g_2, g_3 col piano β: tirate le rette $I_1 I_2$, $I_3 I_1$, $I_2 I_3$; $L_1 L_2$, $L_3 L_1$, $L_2 L_3$, si segnino i punti B_3, B_2, B_1; A_3, A_2, A_1, rispettive intersezioni di queste sei rette colla retta h: i punti U e V, che si cercano, sono gli elementi uniti delle due punteggiate omografiche sovrapposte definite dalle tre coppie A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 di loro elementi corrispondenti.

Infatti, pel teorema di Chasles enunciato sul principio di questo scritto, le generatrici rettilinee della quadrica, del sistema delle g_1, g_2, g_3, determinano sui piani α e β due serie di punti omografiche fra di loro. Ai punti I_1, I_2, I_3 di quella di queste serie, che giace nel piano α, corrispondono nell'altra serie i punti L_1, L_2, L_3 rispettivamente: inoltre, la generatrice rettilinea della quadrica, del sistema suddetto, che passa per uno qualunque dei punti cercati U e V, incontra in esso punto tanto il piano α quanto il piano β, epperò U e V sono elementi uniti delle due serie omografiche di punti considerate. La retta UV, ossia la retta data h, è dunque una retta unita nei due sistemi piani omo-

grafici $I_1 I_2 I_3 \ldots UV$, $L_1 L_2 L_3 \ldots UV$; le coppie $I_1 I_2$, $L_1 L_2$; $I_3 I_1$, $L_3 L_1$; $I_2 I_3$, $L_2 L_3$ di rette corrispondenti di questi sistemi piani omografici determinano sulla retta unita h le coppie di elementi corrispondenti B_3, A_3; B_2, A_2; B_1, A_1 delle due punteggiate omografiche, secondo le quali questa retta h seca quei due sistemi, ed i punti uniti di tali punteggiate omografiche sono perciò punti uniti dei detti sistemi, ossia sono i cercati punti U e V.

Ora è facile di vedere che per costrurre i punti, che abbiamo chiamato A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3, basta, in generale, condurre un numero di rette notevolmente minore di quello che è necessario tirarne per costrurre i punti, che denotammo colle lettere X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3, sia nel caso, in cui la rappresentazione della figura sia fatta in proiezione centrale, che nel caso, in cui questa rappresentazione sia fatta col metodo di Monge. Anzi, in quest'ultimo caso, prendendo, come generalmente si può fare, per piani α e β, i piani, che proiettano la retta h rispettivamente sui piani orizzontale e verticale di proiezione, la costruzione si semplifica maggiormente e si riduce a quella, che è, in modo compiuto, rappresentata nella figura annessa.